第２講　粒子性と波動性

1

次の文章を読み，文中の (1) ～ (8) 内には適切な数式を， (9) 内には適切な数値を有効数字２桁で記入せよ。必要があれば，次の記号または数値を用いよ。

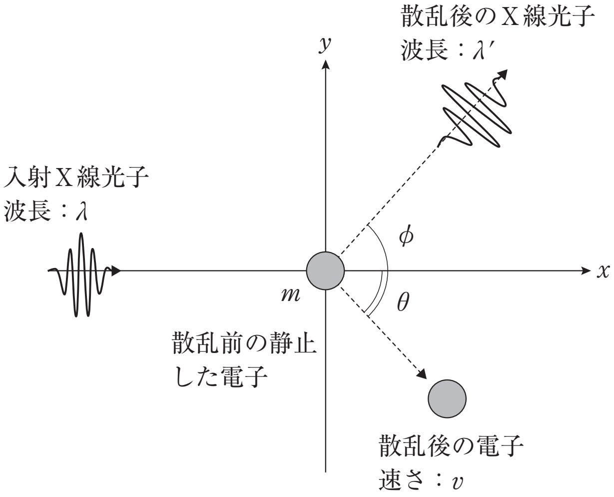
電子の質量：$m=9.1\times10^{-31}$ [kg]，　真空中の光の速さ：$c=3.0\times10^{8}$ [m/s]，
プランク定数：$h=6.6\times10^{-34}$ [J·s]

Ｘ線は非常に振動数の大きい電磁波である。その振動数を ν [Hz] とすると，Ｘ線はエネルギー $E=h\nu$ [J]，運動量 $P=\dfrac{h\nu}{c}$ [kg·m/s] を持った粒子，すなわち光子として取り扱うことができる。Ｘ線を物質に当てたとき，散乱されたＸ線の中に入射したＸ線よりも波長が長いＸ線が観測される現象がある。これはコンプトン効果と呼ばれ，Ｘ線が粒子性を持つことを示す一つの例である。散乱の前後における波長の変化を，運動量保存則とエネルギー保存則を用いて求めてみよう。

図のように，波長 λ [m] を持ったＸ線光子が x 軸上を進み原点に静止している質量 m [kg] の電子によって散乱される。波長 λ を用いると，散乱前のＸ線光子が持っているエネルギーは (1) [J]，その運動量は (2) [kg·m/s] と表される。散乱後，Ｘ線光子は x 軸から ϕ の角度をなす方向に波長 λ' [m] となって進み，電子は x 軸から θ の角度をなす方向に速さ v [m/s] で進んだ。散乱の前後で運動量とエネルギーが保存されることから，x 軸方向についての運動量保存の式は (3) ，y 軸方向についての運動量保存の式は (4) と表され，エネルギー保存の式は， (5) と表される。

(3) 式と (4) 式から角度 θ を消去すると，散乱後の電子の運動エネルギーは m，h，λ，λ'，ϕ を用いて (6) と表される。これを (5) 式に代入した結果は，$\dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{1}{\lambda'}=$ (7) の形に表される。散乱の前後における波長変化 $\Delta\lambda$ [m] $=\lambda'-\lambda$ が λ や λ' に比べ十分に小さいとして，$\dfrac{\lambda}{\lambda'}+\dfrac{\lambda'}{\lambda}\fallingdotseq 2$ という近似式を用いると，$\Delta\lambda$ は m，c，h，ϕ で表せて，$\Delta\lambda=$ (8) [m] となる。例えば，散乱後のＸ線光子が後方（$\phi=180^\circ$）に進むとき，$\Delta\lambda=$ (9) [m] となる。

＜ Note ＞


散乱後のX線光子
波長：λ'
y
入射X線光子
波長：λ
ϕ
x
m
θ
散乱前の静止
した電子
散乱後の電子
速さ：v

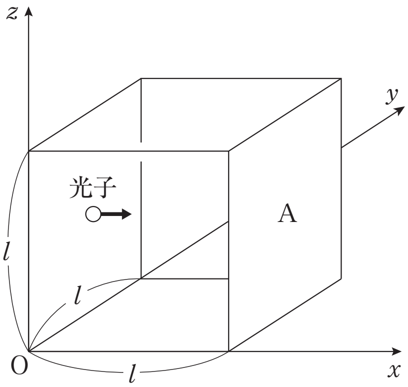
図

＜ Note ＞

2

振動数 ν の光は，プランク定数を h とすれば，[(ア)]のエネルギーをもつ粒子（光子）からなると考えられるが，ここで光子の運動量の大きさを求めてみよう。

右図のような一辺の長さ l の立方体容器中で，１個の光子が容器の壁と完全弾性衝突する場合を考えよう。ここで光子のエネルギーは[(ア)]，速さは c，運動量の大きさは p とする。



光子の速度の x 成分を c_x とおけば，光子が単位時間内に容器の壁Ａと衝突する回数は[(イ)]である。また，光子の運動量の x 成分を p_x とおけば，１回の衝突による光子の運動量変化は[(ウ)]となる。

以上の結果より，１個の光子が単位時間内に壁Ａに及ぼす力の大きさは，力積の考えより[(エ)]となり，したがって圧力の大きさは[(エ)]$/l^2$ となることがわかる。

次に，同じ立方体容器中に N 個の光子が存在する場合を考えよう。N 個の光子それぞれは，等しいエネルギー[(ア)]，速さ c，運動量の大きさ p をもち，互いに衝突することはないとする。

ここで，各光子のもつ p_xc_x を平均して $\overline{p_xc_x}$ とおくと，N 個の光子が壁Ａに及ぼす圧力は[(オ)]と表せる。

ところで，p_x は $p_x=pc_x/c$ とおくことができる。また，各光子の速度の x，y，z 成分の二乗の平均値 $\overline{c_x{}^2}$，$\overline{c_y{}^2}$，$\overline{c_z{}^2}$ が互いに等しいと考えると，$\overline{c_x{}^2}=$[(カ)]$\times c^2$ とおくことができる。結局，$\overline{p_xc_x}$ は c と p を用いて[(キ)]と表すことができる。

一方，単位体積あたりの光のエネルギーを u とおくと，光子の個数 N は，光子１個のエネルギーが[(ア)]であることより $N=$[(ク)]$\times u$ で与えられる。

以上の結果より，N 個の光子が壁Ａに及ぼす圧力を，u，p，c，h，ν で表すと[(ケ)]となる。さらに，この圧力が $\dfrac{1}{3}u$ にも等しいという事実を用いると，$p=$[(コ)]の関係が得られる。これが[(ア)]のエネルギーをもつ１個の光子の運動量の大きさである。

＜ Note ＞

3

電子や中性子は粒子としてだけではなく，X線と同じように波として振舞うことが知られている。このことから，電子線や中性子線を利用して固体の結晶構造を調べることができる。以下の［　　］に適当な式，または数値を入れよ。ただし，数値は有効数字2桁まで求め，必要があれば次の値を用いよ。

真空中の光の速さ　$c=3.00\times10^{8}$m/s　　プランク定数　$h=6.63\times10^{-34}$J·s
電気素量　$e=1.60\times10^{-19}$C　　電子の質量　$m=9.11\times10^{-31}$kg
中性子の質量　$M=1.67\times10^{-27}$kg

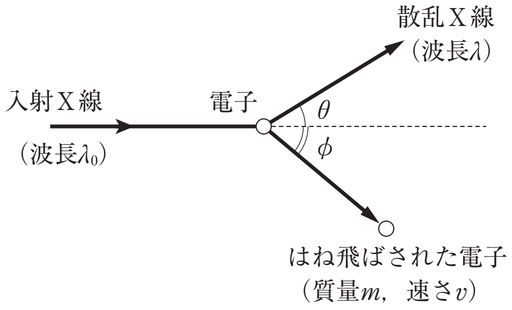
電子線回折法は電子の波動性を利用した方法である。電子の速さを v [m/s] としたとき，電子の波長 λ [m] は h，m，v を用いて，$\lambda=$［(ア)］と表される。したがって，電圧 V [V] で加速された電子の波長は h，e，m，V を用いて，$\lambda=$［(イ)］[m] となる。例えば結晶の格子間隔と同程度の $\lambda=2.00\times10^{-10}$m の電子線を発生させるためには，［(ウ)］V の加速電圧が必要である。

中性子回折法に用いる中性子源としては原子炉内部の核分裂反応で発生した中性子を用いる。いま，中性子が物質波としての波長 $\lambda=2.00\times10^{-10}$m をもつとすると，中性子の速さは $v=$［(エ)］m/s となる。

＜ Note ＞

第２講　確認テスト

図のように波長 λ_0，振動数 ν のＸ線を物質に当てると，物質中の電子（質量 m）によって散乱され，入射Ｘ線より長い波長の散乱Ｘ線が観測される。散乱Ｘ線の波長を λ，入射Ｘ線の向きと散乱Ｘ線の向きの間の角度を θ，入射Ｘ線の向きとはね飛ばされた電子の進む向きの間の角度を ϕ とする。電子の衝突後の速さを v，プランク定数を h，光の速さを c として以下の空欄に適当な式を入れなさい。



この衝突の前後で運動量が保存されるので，入射Ｘ線に平行な成分および垂直な成分についてそれぞれ

$$\boxed{(1)}=\boxed{(2)}\cdot\cos\theta+\boxed{(3)}\cdot\cos\phi$$

$$0=\boxed{(2)}\cdot\sin\theta-\boxed{(3)}\cdot\sin\phi$$

が成立する。またエネルギーも保存されるので，次式が成り立つ。

$$\boxed{(4)}=\boxed{(5)}+\frac{1}{2}mv^2$$

これらの式より ϕ および v を消去し，また $(\lambda-\lambda_0)^2\fallingdotseq 0$ を用いて整理すると，結局，散乱Ｘ線の波長は

$$\lambda=\lambda_0+\boxed{(6)}\cdot(1-\cos\theta)$$

となる。この $\boxed{(6)}$ をコンプトン波長という。

（1）の選択肢

① $\dfrac{h}{\lambda}$　② $\dfrac{h}{\lambda_0}$　③ $h\nu$　④ $\dfrac{hc}{\nu}$

（2）の選択肢

① $\dfrac{h}{\lambda}$　② $\dfrac{h}{\lambda_0}$　③ $h\nu$　④ $\dfrac{hc}{\nu}$

（3）の選択肢

① $\dfrac{h}{\lambda}$　② $\dfrac{h}{\lambda_0}$　③ mv　④ mc^2

（4）の選択肢

① $\dfrac{hc}{\lambda}$　② $\dfrac{hc}{\lambda_0}$　③ mv　④ mc^2

（5）の選択肢

① $\dfrac{hc}{\lambda}$　② $\dfrac{hc}{\lambda_0}$　③ $\dfrac{1}{2}mv^2$　④ mc^2

（6）の選択肢

① $\dfrac{mc^2}{h}$　② $\dfrac{mc}{h}$　③ $\dfrac{h}{mc^2}$　④ $\dfrac{h}{mc}$

第２講　解答

1

(1) $\dfrac{hc}{\lambda}$

(2) $\dfrac{h}{\lambda}$

(3) $\dfrac{h}{\lambda}=\dfrac{h}{\lambda'}\cos\phi+mv\cos\theta$

(4) $0=\dfrac{h}{\lambda'}\sin\phi-mv\sin\theta$

(5) $\dfrac{hc}{\lambda}=\dfrac{hc}{\lambda'}+\dfrac{1}{2}mv^2$

(6) $\dfrac{h^2}{2m}\left(\dfrac{1}{\lambda^2}+\dfrac{1}{\lambda'^2}-\dfrac{2\cos\phi}{\lambda\lambda'}\right)$

(7) $\dfrac{h}{2mc}\left(\dfrac{1}{\lambda^2}+\dfrac{1}{\lambda'^2}-\dfrac{2\cos\phi}{\lambda\lambda'}\right)$

(8) $\dfrac{h}{mc}(1-\cos\phi)$

(9) 4.8×10^{-12}

2

(ア) $h\nu$　(イ) $\dfrac{c_x}{2l}$　(ウ) $-2p_x$　(エ) $\dfrac{p_xc_x}{l}$　(オ) $\dfrac{N\overline{p_xc_x}}{l^3}$　(カ) $\dfrac{1}{3}$

(キ) $\dfrac{1}{3}pc$　(ク) $\dfrac{l^3}{h\nu}$　(ケ) $\dfrac{pcu}{3h\nu}$　(コ) $\dfrac{h\nu}{c}$

3

(ア) $\dfrac{h}{mv}$　(イ) $\dfrac{h}{\sqrt{2meV}}$　(ウ) 38　(エ) 2.0×10^3

第2講　確認テスト

【解答】

(1)　②　　(2)　①　　(3)　③　　(4)　②　　(5)　①　　(6)　④

【解説】

入射X線のエネルギーは $\dfrac{hc}{\lambda_0}$，運動量は $\dfrac{h}{\lambda_0}$ である．

運動量保存則は

$$\begin{cases} 水平成分：\underline{\dfrac{h}{\lambda_0}}_{(1)}=\underline{\dfrac{h}{\lambda}}_{(2)}\cos\theta+\underline{mv}_{(3)}\cos\phi & \text{——Ⓐ} \\ 垂直成分：0=\underline{\dfrac{h}{\lambda}}_{(2)}\sin\theta-\underline{mv}_{(3)}\sin\phi & \text{——Ⓑ} \end{cases}$$

エネルギー保存則は

$$\underline{\frac{hc}{\lambda_0}}_{(4)}=\underline{\frac{hc}{\lambda}}_{(5)}+\frac{1}{2}mv^2 \quad \text{——Ⓒ}$$

Ⓐより，

$$mv\cos\phi=\frac{h}{\lambda_0}-\frac{h}{\lambda}\cos\theta$$

Ⓑより，

$$mv\sin\phi=\frac{h}{\lambda}\sin\theta$$

この2式の両辺を2乗して和をとり，$\sin^2\phi+\cos^2\phi=1$，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いると，

$$m^2v^2=\left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2-\frac{2h^2}{\lambda_0\lambda}\cos\theta+\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$$

これとⒸから得る

$$m^2v^2=2hcm\left(\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda}\right)$$

を用いて v^2 を消去すると，

$$2hcm\left(\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda}\right)=\left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2+\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2-\frac{2h^2}{\lambda_0\lambda}\cos\theta$$

$$=\left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2+\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2\underbrace{-2\left(\frac{h}{\lambda_0}\right)\left(\frac{h}{\lambda}\right)+2\left(\frac{h}{\lambda_0}\right)\left(\frac{h}{\lambda}\right)}_{\text{0を足して }(\lambda-\lambda_0)^2\text{ の形を作る！}}-\frac{2h^2}{\lambda_0\lambda}\cos\theta$$

$$=\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda\lambda_0}\right)^2h^2+\frac{2h^2}{\lambda\lambda_0}(1-\cos\theta)$$

両辺に $\dfrac{\lambda_0\lambda}{h}$ をかけて

$$2cm(\lambda-\lambda_0)=\frac{(\lambda-\lambda_0)^2h}{\lambda\lambda_0}+2h(1-\cos\theta)$$

$(\lambda-\lambda_0)^2\fallingdotseq 0$ を用いて，

$$2mc(\lambda-\lambda_0)=2h(1-\cos\theta)$$

$$\therefore\quad \lambda-\lambda_0=\underline{\frac{h}{mc}}_{(6)}(1-\cos\theta)$$